2. Logika

**Kijelentéslogika**

**Kijelentés**: Olyan állítás, amelyről egyértelműen eldönthető, hogy igaz, vagy hamis

Műveletek/logikai operátorok:

Változók számától függően csoportosíthatóak 1 és 2 változós műveletekre

**Egyváltozós**:

Negáció (tagadás)

Jelölés: ¬ (¬A 🡪 „*nem A”*)

**Kétváltozós**:

Konjukció (ÉS - AND)

Csak akkor igaz, ha mindkét változója igaz  
Jelölés: ∧ (A ∧ B 🡪 *„A és B”*)  
Példa: Az ég felhős és esik az eső.

Diszjunkció (VAGY - XOR)

Csak akkor hamis, ha mindkét változója hamis  
 Jelölés: ∨ (A ∨ B 🡪 *„A vagy B”*)  
 Példa: Az ég felhős, vagy esik az eső

Implikáció (KÖVETKEZTETÉS)  
 Jelölés: → (A → B 🡪 *„A-ból következik B”*)  
 Példa: Ha az ég felhős, akkor esik az eső.

Ekvivalencia (EGYENLŐSÉG)  
 Jelölés: ↔ (A ↔ B 🡪 *„Akkor és csak akkor B, ha A”*)  
 A ↔ B ≡ (A → B) ∧ (B → A)  
 Példa: Az eső akkor és csak akkor esik, ha felhős az ég.

Egyéb kétváltozós műveletek:  
 A | B ≡ ¬ (A ∧ B)  
 A ↓ B ≡ ¬ (A ∨ B)  
 A ⊕ B ≡ ¬ ((A → B) ∧ (B → A))

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | B | A ∧ B | A ∨ B | A → B | A ↔ B | ¬A | ¬B | A | B | A ↓ B | A ⊕ B |
| i | i | i | i | i | i | h | h | i | i | h |
| i | h | h | i | h | h | h | i | i | h | i |
| h | i | h | i | i | h | i | h | i | h | i |
| h | h | h | h | i | i | i | i | h | h | h |

**Logikai műveletek azonosságai** *(nem fontos, jó tudni)*

Egy kijelentés nem lehet egyszerre igaz és hamis is:  
Egy kijelentés és tagadásának konjukciója mindig hamis.  
Egy kijelentés és tagadásának diszjunkciója mindig igaz.

Egy kijelentés önmagával vett konjukciója vagy diszjunkciója megegyezik az eredeti kijelentés logikai értékével

A diszjunkció és konjukció kommutatívak és asszociatívak, illetve egymásra nézve disztibutívak.

De-Morgan azonosságok:  
¬(A ∨ B) ≡ ¬A ∧ ¬B  
¬(A ∧ B) ≡ ¬A ∨ ¬B  
¬¬A ≡ A

**Logikai formulák és formalizálás**

Egy kijelentést véges hosszú jelsorozatra bontunk, ahol:  
 A kijelentés felbonthatatlan részeinek (kijelentés vagy ítéletváltozók) jele: p, q, r…   
 Logikai műveletek jele(i): ¬, ∧, ∨, →, ↔  
 Zárójelpárok

Egy ilyen jelsorozatot logikai formulának nevezünk, ha előállítható az alábbi két szabály véges sok alkalmazásával:  
 1. Minden kijelentésváltozó formula  
 2. Ha A és B két formula, akkor   
 ¬(A), (A) ∧ (B), (A) ∨ (B), (A) → (B), (A) ↔ (B) is formulák.

**Konjuktív normálforma** (KNF/CNF)

Az ítéletváltozókat és negáltjaikat literáloknak (p, q, r…);  
Véges sok literál diszjunkcióját klóznak (p ∨ ¬q);  
Véges sok klóz konjukcióját konjuktív normálformának nevezzük.  
 ((p ∨ ¬q) ∧ (¬r ∨ p ∨ q) ∧ r)

Ha egy klóz értéke egyértelmű (fenti példában r), egységklóznak nevezzük.

Logikai azonosságok használatával minden formula konjuktív normálforma alakra alakítható.

**Diszjunktív normálforma**

Egy formulát diszjunktív normálformulának nevezünk, ha olyan konjunkciók diszjunkciója, melyben minden konjunkcióban a változók mindegyike legfeljebb egyszer (negálva, vagy negálatlanul) fordul elő.  
Ha minden változó pontosan szerepel minden konjukcióban, teljes diszjunktív normálformuláról van szó.  
Példa: F = (p ∧ q ∧ ¬r) ∨ (¬p ∧ r)

Tétel:

1. Minden formulához létezik vele ekvivalens diszjunktív normálformula
2. Minden formulához létezik vele ekvivalens teljes diszjunktív normálformula.

Generálás igazságtábla alapján

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A | B | Eredmény | Formula |
| i | i | i | ¬A ∧ ¬B |
| i | h | h |  |
| h | i | i | ¬A ∧ B |
| h | h | i | A ∧ B |

🡪(¬A ∧ ¬B) ∨ (¬A ∧ B) ∨ (A ∧ B)

**Következtetés, következtetési formák**

A1, A2…, An premisszák és B konklúzió esetén, B formula logikai következménye az A1, A2…, An premisszáknak, ha az A1, A2…, An mindegyikének logikai értéke, és B logikai értéke együttesen igaz.  
Következtetési szabályok, formák:

Kontrapozíció  
 p → q => ¬p → ¬q

Leválasztási szabály  
 p → q, p => q

Elvevő szabály  
 p → q, ¬q => ¬p

Indirekt bizonyítás  
 ¬p → ¬q, q => p

Láncszabály  
 p → q, q → r => p →r

Reductio ad absurdum  
 p → q, p → ¬q => ¬p

**Predikátumlogika**

Kijelentéslogika finomszerkezeti vizsgálata, pontosabban fogalmazhatunk meg állításokat

**Predikátum**: Logikai függvény

**Kifejezések felépítése**, szimbólumok:

* Logikai operátorok (¬, ∧, ∨, →, ↔)
* Egzisztenciális kvantor (∃) 🡪 „Létezik”, „Van olyan”, stb.
* Univerzális kvantor (∀) 🡪 „bármely”, „minden”, „tetszőleges”, stb.
* Indivídumtartomány (U = {}) és Indivídumváltozók (x1, x2…, xn)
* Predikátumjelek
* Függvényjelek

Predikátumjel: olyan függvény, amely individuumváltozókból logikai állítást készít  
Függvényjel: műveletek kifejezésére szolgáló jelek

**Predikátumlogikai kifejezés** létrehozása 2 szabály véges sok alkalmazásával:

1. Az xi indivídumválzozók önmagukban is kifejezések
2. ha k1, k2…, kn kifejezések, akkor bármely f függvényjelre f(k1, k2…, kn) is kifejezés, ha az f függvény n-változós

**Atomi formula**

Az atomi formulák P(k1, k2…, kn) alakú jelsorozatok, ahol P egy n-változós predikátumjel, k1, k2…, kn pedig kifejezések.

**Formula, formalizálás**

A predikátumlogika minden formulája előállítható az alábbi 3 szabály véges sok alkalmazásával:

1. A formulák atomi formulák
2. Ha F és G formulák, akkor (F ∨ G), (F ∧ G), (F ↔ G), (F → G), (¬F) is formulák
3. Ha F formula és xi individumváltozó, akkor (∀xi) F és (∃xi) F is formula

**Tagadás**

Predikátumlogikában mindig részformulánként tagadunk

Példa: Minden fa növény.  
 Legyen U = {növények}  
 Predikátumjelek: F(x): „x fa”, N(x): „x növény”  
 Formális állítás: (∀x) (F(x) → N(x))  
 Tagadás: ¬(∀x) (F(x) → N(x))

**Interpretáció**

Egy logikai formulának „értelmet” adunk, formális állításként vizsgáljuk:

1. Választunk egy A, nem üres halmazt (interpretációs tartomány)
2. Minden predikátumjelhez rendelünk egy A-n értelmezett predikátumot
3. Minden függvényjelhez rendelünk egy A-n értelmezett függvényt

Egy formula **tautológia** (igaz), ha bármely interpretációja szerint tetszőleges   
a = (a1, a2…, an), a ∈ A sorozatot a formulába helyettesítve igaz értéket kapunk.